Menone di Platone

Incommensurabilità e commensurabilità

Classe 1 Sez. F – Indirizzo Liceo Matematico,
Liceo Classico «Garibaldi» - Palermo

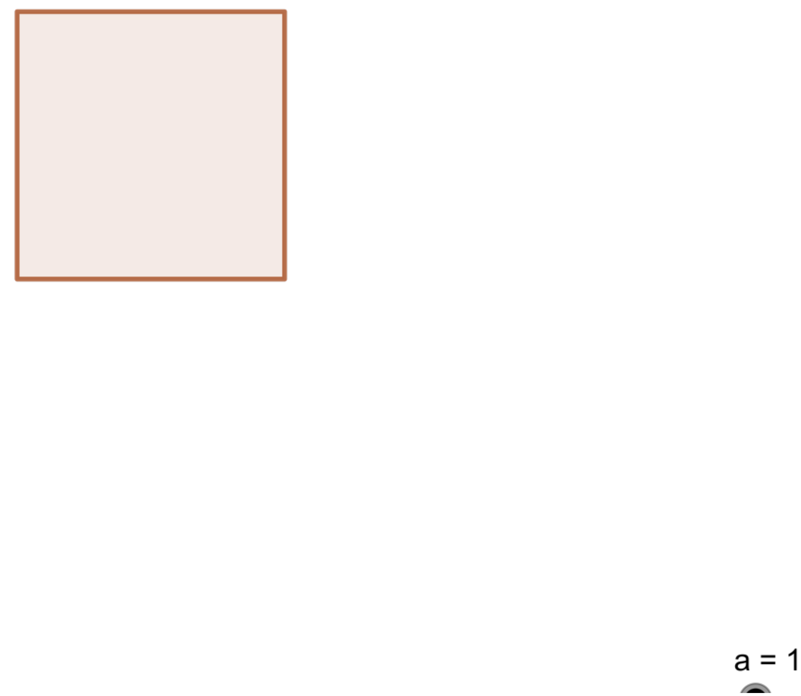
Menone di Platone

SOCRATE: Fa' attenzione se ti pare che ricordi o che impari da me.

MENONE: D'accordo, farò attenzione.

SOCRATE: Dimmi dunque, ragazzo, sai che un'area quadrata è fatta così?

SCHIAVO: Sì.



Menone di Platone

SOCRATE: Se dunque questo lato fosse di due piedi e di due piedi questo, di quanti piedi sarebbe il tutto? Rifletti in questo modo: se qui fosse stato di due piedi e qui di un piede soltanto, la superficie non sarebbe forse stata di un piede per due?

SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: Ma dal momento che anche qui è di due piedi, non è forse di due volte due piedi?

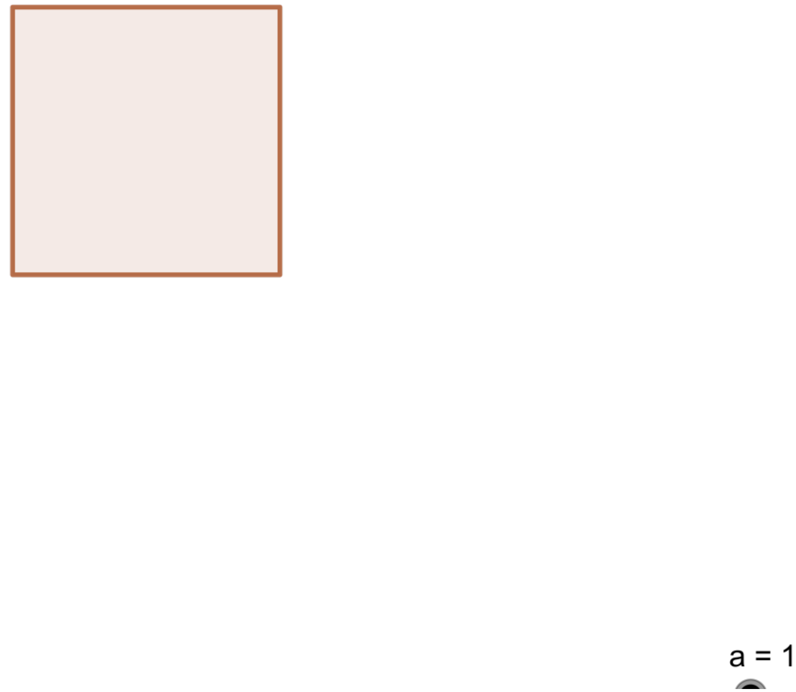
SCHIAVO: Lo è.

SOCRATE: E dunque è di due piedi per due?

SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: Quanto sono dunque questi due piedi per due? Fa' il calcolo e dimmi.

SCHIAVO: Quattro, Socrate.



Menone di Platone

SOCRATE: E non potrebbe esservi un'area che sia il doppio di questa ma simile, avente tutti i lati uguali, come questa?

SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: E dunque di quanti piedi sarà?

SCHIAVO: Di otto piedi.

$a = 1$

Menone di Platone

SOCRATE: Suvvia, prova a dirmi quanto sarà la lunghezza di ogni lato di quell'area. Il lato di questa è infatti di due piedi: quanto sarà il lato di quell'area doppia?

SCHIAVO: è evidente, o Socrate, che sarà il doppio.

………

SOCRATE: Sta' a vedere come egli ricorda di seguito, come deve ricordare. Dimmi: tu affermi che dal lato doppio si genera l'area doppia;… : ebbene guarda se a tuo parere risulterà ancora dal lato doppio.

SCHIAVO: A me almeno sembra.

a = 1

Menone di Platone

SOCRATE: E questa linea non diventa forse il doppio di questa se aggiungiamo un'altra linea della stessa lunghezza a partire da qui?

SCHIAVO: Certo.

SOCRATE: Da questa linea, dunque, tu dici, risulterà l'area di otto piedi, se i quattro lati sono della stessa lunghezza?

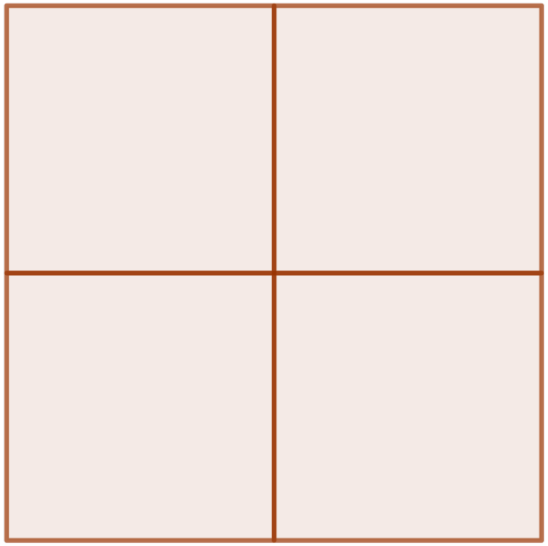
SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: Tracciamo dunque, a partire da questo, quattro lati uguali. Sarebbe questa o qualcos'altro l'area che, a tuo parere, è di otto piedi?

SCHIAVO: Certo.

SOCRATE: E in quest'area non ci sono forse questi quattro quadrati, ognuno dei quali è uguale a questo di quattro piedi?

SCHIAVO: Sì.



a = 5

Menone di Platone

SOCRATE: Dunque di quanto è? Non è il quadruplo?

SCHIAVO: Come no?

SOCRATE: Dunque ciò che è il quadruplo è anche doppio?

SCHIAVO: No, per Zeus.

SOCRATE: Ma allora di quante volte è maggiore?

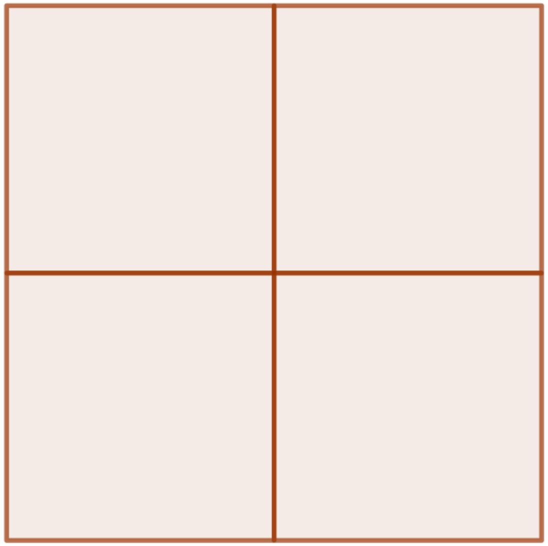
SCHIAVO: Di quattro volte.

SOCRATE: Dunque, ragazzo, dal lato doppio risulta non un'area doppia, ma quadrupla.

SCHIAVO: è vero.

SOCRATE: Quattro volte quattro infatti fa sedici, no?

SCHIAVO: Sì.

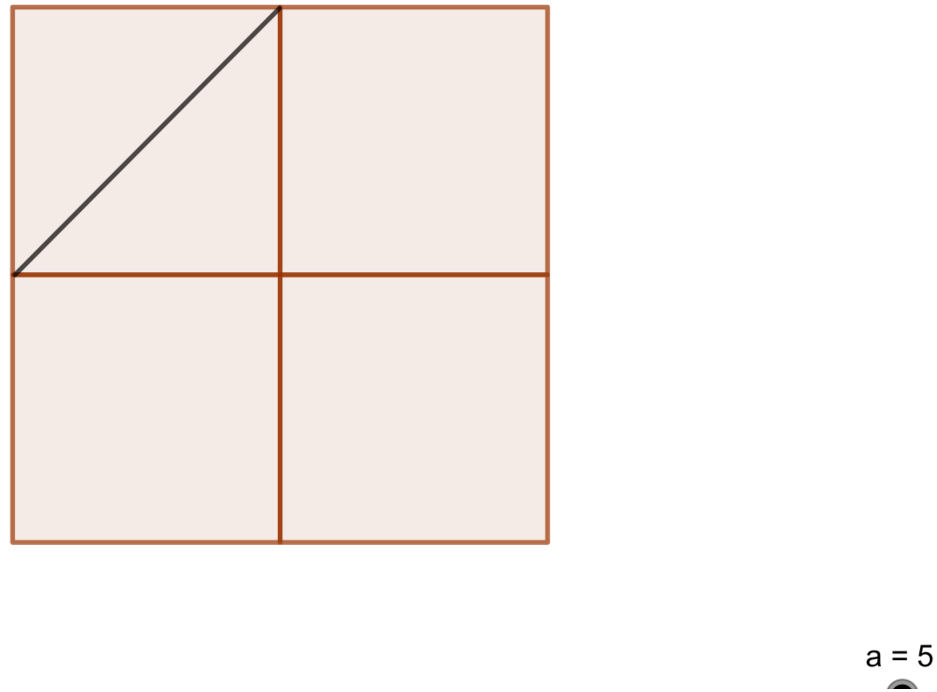


a = 5

Menone di Platone

SOCRATE: Questa linea da angolo ad angolo non taglia in due ognuna di queste aree?

SCHIAVO: Sì.



Menone di Platone

SOCRATE: Non ne risultano questi quattro lati uguali che contengono quest'area?

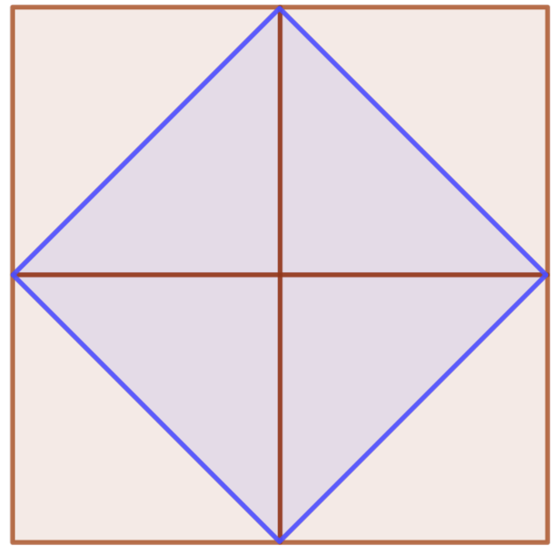
SCHIAVO: Sì, risulta così.

SOCRATE: Osserva dunque: quanto è grande quest'area?

SCHIAVO: Non capisco.

SOCRATE: Non è forse vero che, ogni linea le ha divise a metà all'interno queste quattro aree? O no?

SCHIAVO: Sì.



a = 5

Menone di Platone

SOCRATE: Quante sono all'interno di questa superficie queste metà?

SCHIAVO: Quattro.

SOCRATE: E quante in quest'altra?

SCHIAVO: Due.

SOCRATE: Quattro che cos'è di due?

SCHIAVO: Il doppio.

SOCRATE: Dunque quest'area di quanti piedi è?

SCHIAVO: Di otto piedi.

SOCRATE: A partire da quale linea?

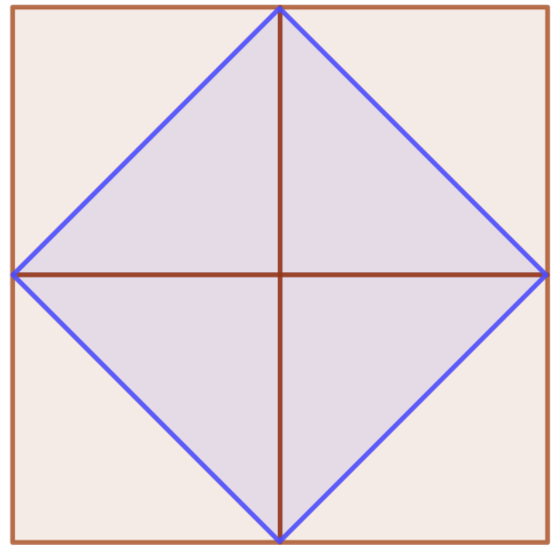
SCHIAVO: Da questa.

SOCRATE: Da quella tesa da angolo ad angolo dell'area di quattro piedi?

SCHIAVO: Sì.

SOCRATE: I sofisti chiamano questa linea diagonale: cosicché, se questa linea ha il nome di diagonale, a partire dalla diagonale, come tu dici, o schiavo di Menone, risulterebbe l'area doppia.

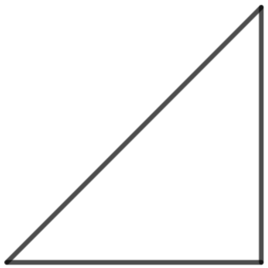
SCHIAVO: Certo, o Socrate.



a = 5

Teorema di Pitagora

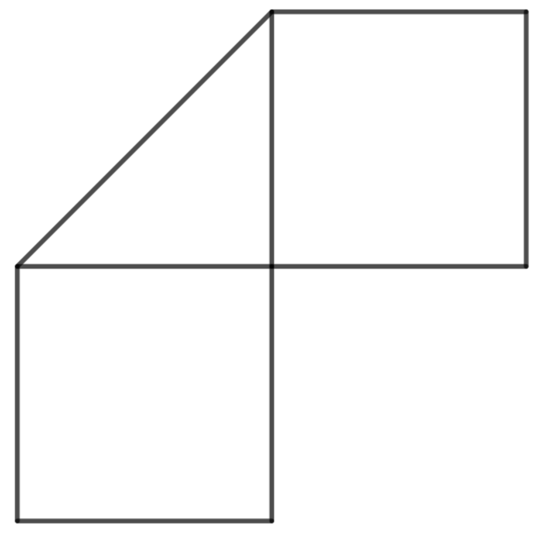
In un triangolo rettangolo



Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo

La somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti

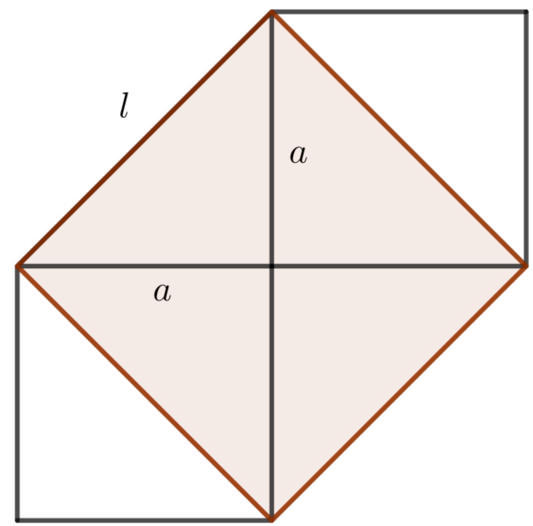


Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo

La somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti

È uguale a all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa



$$a^2 + a^2 = l^2$$

- Se il lato del quadrato iniziale è uguale alla unità di misura

$$a = 1$$

$$1^2 + 1^2 = l^2$$

$$1 + 1 = 2 = l^2$$

$$l^2 = 2$$

$$l = \sqrt{2}$$

- L’ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateto unitario non è esprimibile per mezzo di un numero razionale

$$l \neq \frac{m}{n}$$

Dimostrazione per assurdo

- m e n siano primi tra loro

$$l = \frac{m}{n}$$

$$l^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Dimostrazione per assurdo

$$m^2 = 2n^2$$

m^2 è pari

Quindi m è pari

$$m = 2k$$

$$\left(2k\right)^2 = 2n^2$$

$$4k^2 = 2n^2$$

$$2k^2 = n^2$$

Dimostrazione per assurdo

$$n^2 = 2k^2$$

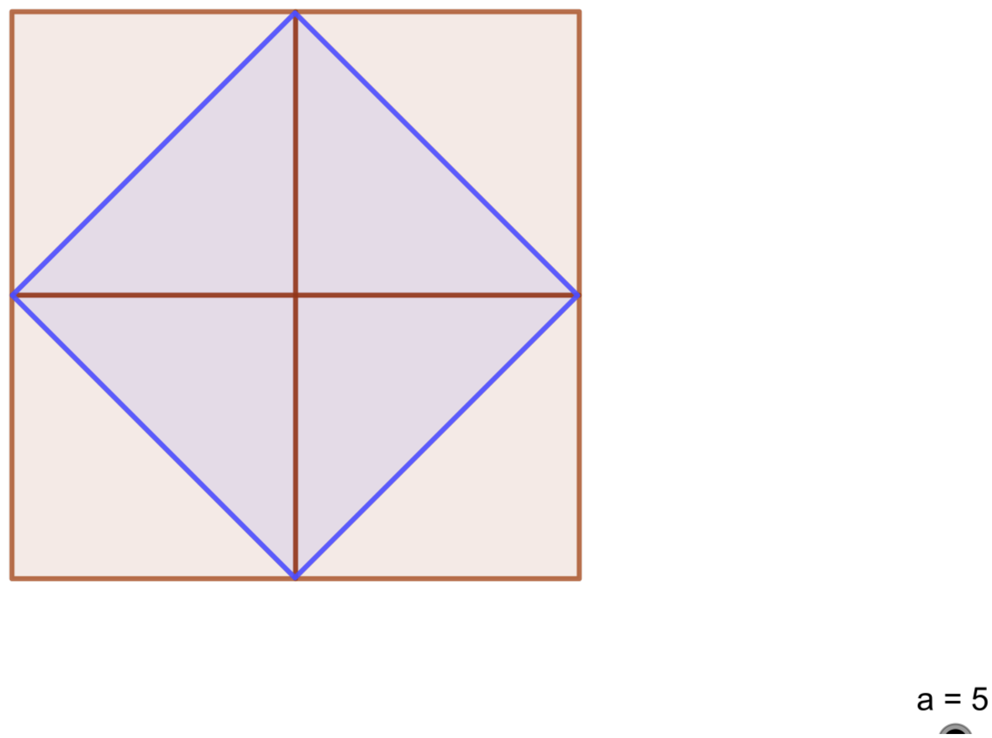
n^2 è pari

- Quindi n è pari
- Ma anche m è pari
- Contro l'ipotesi che fossero primi tra loro
- Quindi

$$l = \sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$

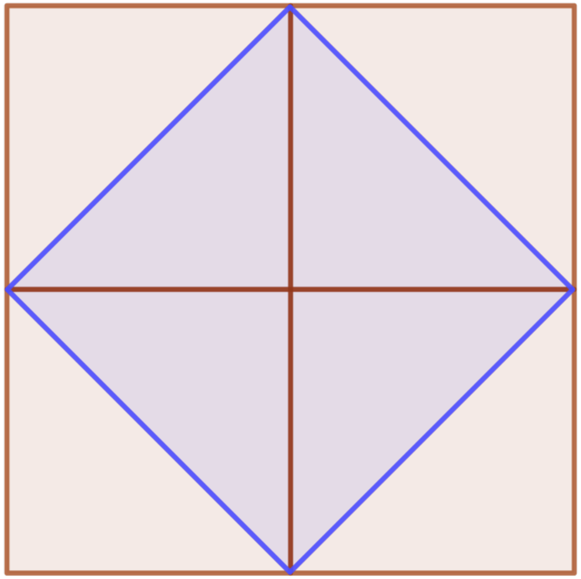
Incommensurabilità

La diagonale di un quadrato è incommensurabile con il suo lato



Incommensurabilità

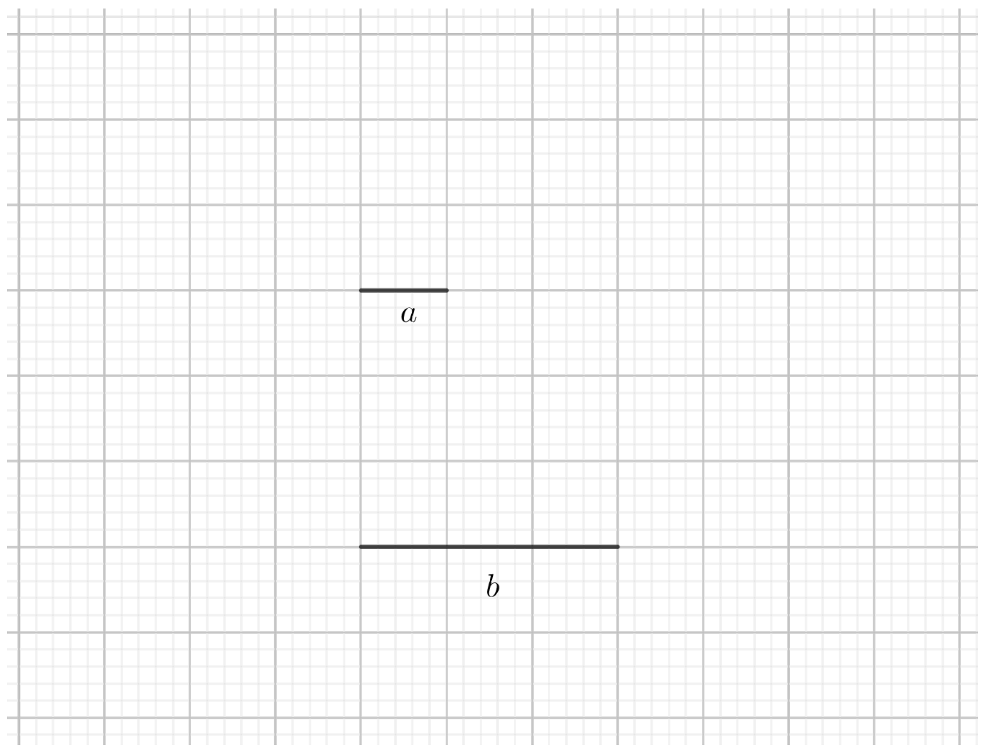
$$l = \sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$



a = 5

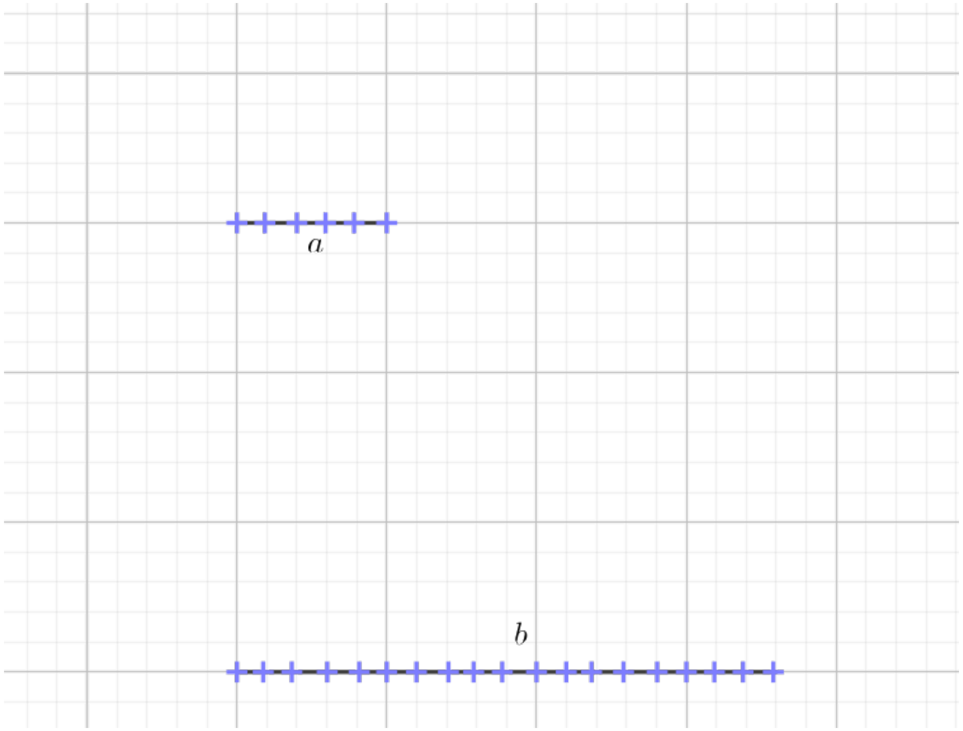
Commensurabilità

- Consideriamo due segmenti *a* e *b*
- Può capitare che *a* sia contenuto in *b* un numero intero di volte *r*
- $b = r\,a$



Commensurabilità

- Oppure può capitare che si possa dividere *a* in *n* segmenti uguali ognuno di lunghezza *a/n* in modo che
- $b = m/n\ a$
- $b = 18/5\ a$
- $b = 3{,}6\ a$



Commensurabilità

- I due segmenti *a* e *b* sono detti commensurabili
- La misura di un segmento *b* rispetto a una unità di misura *a* si esprime mediante un numero razionale *m*/*n*
- Questo non accade per la diagonale del quadrato rispetto al suo lato considerato come unità di misura